Universität Bayreuth — Mathematikwettbewerb
11. Tag der Mathematik — 9. Juli 2016

Klassenstufe 9-10

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.
Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

1. **Stau auf der Autobahn**

Papa fährt Claudia zum Judoturnier. Papa hat sich ausgerechnet, dass er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h rechtzeitig beim Judoturnier ankommt. Dummerweise hat er die erst heute neu eingerichtete Autobahnbaustelle und den durch sie verursachten Stau nicht berücksichtigt. Während der ersten Hälfte der Strecke schafft er nur einen Schnitt von 70 km/h. Wie schnell muss er auf der zweiten Hälfte der Strecke durchschnittlich fahren, damit Claudia trotzdem pünktlich zum Judoturnier kommt?

Rechnung (oder Zeichnung) als Begründung angeben!

Wir wissen nicht, wo Papa und Claudia zuhause sind, und auch nicht wo das Judoturnier stattfindet. Aber diese Information ist für die Lösung der Aufgabe auch gar nicht nötig.

Bonuspunkte gibt es für eine Begründung, warum Sie Start und Ziel nicht kennen müssen, um die Aufgabe zu lösen.

2. **Buntstifte**

Wie jedes Jahr gibt es am Ende des Semesters an der Universität B. viele schriftliche Prüfungen. Prof. Schneider korrigiert stets mit roten Buntstiften und hat eine Schachtel mit 20 roten Buntstiften bestellt. Prof. Huber korrigiert stets mit grünen Buntstiften und hat eine Schachtel mit 20 grünen Buntstiften bestellt. Prof. Übergenau korrigert erst mit roten Buntstiften und danach mit grünen Buntstiften und hat deshalb eine gemischte Schachtel mit 10 grünen und 10 roten Buntstiften bestellt.

Im Büromateriallager werden die Stifte aus den großen 1000er Schachteln in neutrale kleinere Schachteln umgepackt und mit Addressen beklebt.

Da ruft plötzlich Herr Schmidt: Schade, jetzt habe ich auf jede Schachtel eine falsche Addresse geklebt.

Der neue Mitarbeiter Herr Meier wird jetzt getestet. Herr Meier darf jetzt aus einer einzigen von ihm bestimmten Schachtel, ohne hineinzuschauen, einen einzigen Buntstift entnehmen und diesen entnommenen Buntstift anschließend anschauen.

Reicht das, damit Herr Meier die Adressen von allen drei Schachteln korrigieren kann?

Wenn ja, wie geht er vor? *Genaue Erklärung und Begründung angeben!*

3. **Welcher griechische Gott manipuliert den Zufall?**

   Der alleinstehende Prof. Wankelmütig fährt jeden Abend mit dem Linienbus in die Stadt zum Abendessen. Dazu geht er an die Haltestelle Mathematisches Institut. Dort fährt im 30-min-Takt die Buslinie 311 in die Stadt. Neben deren Endhaltestelle liegt die Gaststätte Olymp, eine seiner Lieblings-Gaststätten, in der er stets eine Riesenportion gefüllte Bifteki isst. Ebenfalls im 30-min-Takt fährt von der Haltestelle Mathematisches Institut die Buslinie 317 zu einer anderen Endhaltestelle in der Stadt, neben der seine zweite Lieblingsgaststätte, die italienische Gäststätte Venezia, liegt. Hier isst er stets eine supergroße Pizza quattro stagioni. (Weitere Busse fahren an der Haltestelle Mathematisches Institut nicht ab.)

   Nach einem so arbeitsreichen Tag kann sich Prof. Wankelmütig stets nicht recht entscheiden, wohin er zum Essen fahren soll. Deshalb ist er kürzlich auf folgende Idee gekommen. Er lässt den Zufall entscheiden, ob er zum Olymp oder ins Venezia fährt: Er steigt immer in den jeweils zuerst an der Bushaltestelle ankommenden Bus.

   Da Prof. Wankelmütig äußerst genau ist, führt er in seinem Taschenkalender genau Buch. Nach zwei Monaten ist er aber sehr verwundert, als er eine Aufstellung seiner Gaststättenbesuche am Abend macht. Er war nämlich nur 9-mal im Venezia aber 32-mal im Olymp.

   Jetzt ist Prof. Wankelmütig verwirrt. Welcher griechische Gott (vielleicht gar Zeus?) hat da den Zufall manipuliert und ihn da so beharrlich ins Restaurant Olymp gezerrt?
   Können Sie das Rätsel lösen? Bitte Erklärung angeben.
   Nehmen Sie an, dass die Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle eine gleichverteilte Zufallsvariable ist.

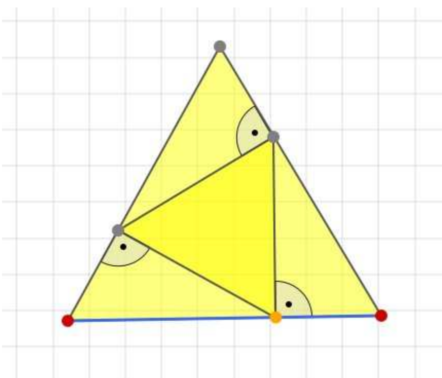
   

   Du gehst ins Olymp zum Essen!!!

4. **Geometrie**

   Ein gleichseitiges Dreieck ist in einem größeren gleichseitigen Dreieck so einbeschrieben, dass entsprechende Seiten der beiden Dreiecke aufeinander senkrecht stehen. Dadurch wird die Fläche des größeren Dreiecks in 4 Teildreiecke zerlegt.

   Wie viel Prozent der Fläche des großen Dreiecks macht die Summe der Flächen der 3 rechtwinkligen Dreiecke aus?

5. **Ziege**

Ziege Zoro ist an einer 6 m langen Leine angebunden. Das andere Ende der Leine ist an einem Pflock befestigt, so dass die Ziege offensichtlich gerade ein kreisförmiges Stück der Wiese abweiden kann, wenn Sie auf der freien (ebenen) Wiese weiden kann.

Abbildung 1: Prinzipskizze

Im Sommer oben auf der Alm brennt die Sonne heiß, der Regen ist auch nicht immer angenehm. So wünscht sich Ziege Zoro sehnlichst, an einer Stelle angebunden zu sein, von der aus sie im Stall der Alm Unterschlupf finden kann. Daher bindet sie der Almhirt im Mittelpunkt A der Längswand der Alm an (siehe Fig. 2).

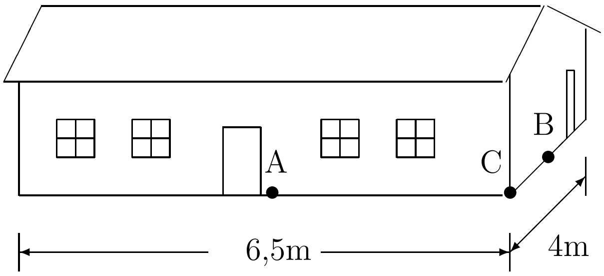


Abbildung 2: Almhütte

Ziege Zoro ist zufrieden, nach einiger Zeit allerding meckert Zoro, da sie gemerkt hat, dass die abzugrasende Fläche deutlich kleiner geworden ist.

Aufgabe a: Zeichne den Bereich (in Draufsicht), den Ziege Zoro jetzt abweiden kann. Schraffiere die beweidete Fläche und berechne ihren Flächeninhalt.

Für seine Ziege Zoro tut der Almhirt alles. Da sich die Ziege beim Anleinen in Punkt B (Mittelpunkt der kürzeren Seitenwand des Stalls) größere Ausbeute verspricht, erfüllt er ihr auch diesen Wunsch.

Aufgabe b: Zeichne den Bereich den die Ziege jetzt abweiden kann. Berechne wieder den Flächeninhalt.

Inzwischen hat Ziege Zoro gemerkt, dass sie zwar einen geschützten Unterstand hat, dafür aber eine kleinere Weidefläche eingetauscht hat. Daher bittet sie nun den Almhirten, sie doch an der Ecke der Almhütte C anzubinden. Auch dieser Wunsch wird ihr erfüllt. Tatsächlich ergibt sich nun eine größere Weidefläche als beim Anbinden in A beziehungsweise B.

Aufgabe c: Zeichne erneut die abzugrasende Fläche und berechne ihren Flächeninhalt.

6. **Abituraufgaben im Tresor**

Der neue Vize-Schulleiter Dr. Kurt Vergeßlich (Mathematik- und Physiklehrer) ist dieses Jahr erstmals für die sichere Unterbringung der Abituraufgaben im altmodischen Tresor in der Physikvorbereitung zuständig. Der altmodische Tresor hat nur ein 3-stelliges Zahlenschloß, wie auf billigen Zahlenschlößern für Kinderfahrräder, aber der Tresor ist zusätzlich hinter einem riesengroßen Bild von Gauß versteckt. Nachdem er die Abituraufgaben im Tresor verstaut hat, hat Dr. Kurt Vergeßlich sicherheitshalber den Zahlencode geändert (so dass seine Kollegen nicht in den Tresor können) und wieder das große Bild von Gauß vor den Tresor gehängt. Heute, 14 Tage später, soll er jetzt die Mathematik-Abituraufgaben aus dem Tresor holen, weil Sie in 15 Minuten benötigt werden. Leider hat Dr. Kurt Vergeßlich die Codekombination vergessen. Das einzige was er sich von der 3-stelligen Codezahl ABC gemerkt hat ist:

- Die Zahl 0 war nicht im Code.

- Die Zahl ABC war Primzahl.

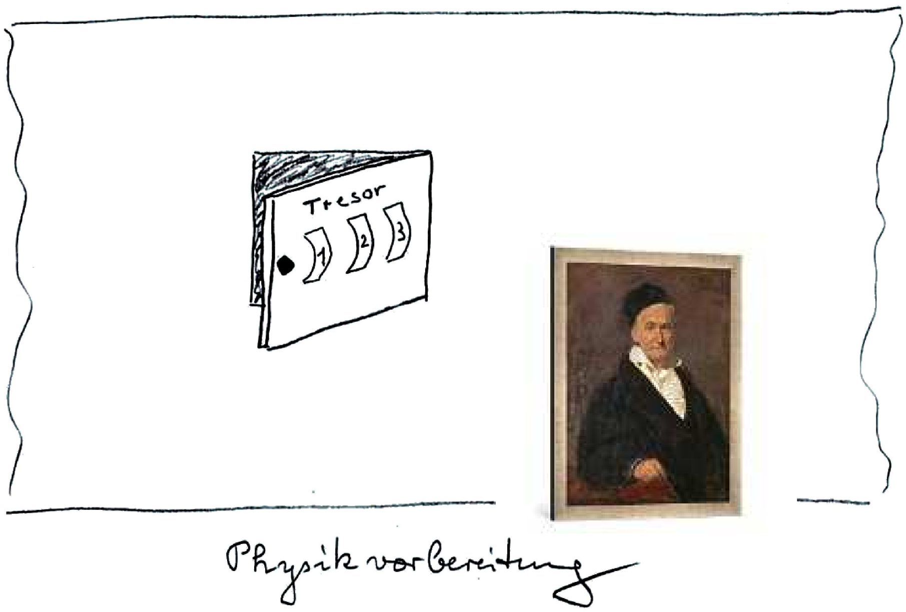
- Die zweistellige Teilzahl AB war auch Primzahl.

- Die zweistellige Teilzahl BC war auch Primzahl.

- Jede der einstelligen Zahlen A und B und C war auch Primzahl.

Wieviele und welche Codekombinationen muss Dr. Kurt Vergeßlich (höchstens) ausprobieren um den Tresor zu öffnen?

<u>Hinweis:</u> Man denke daran, dass die Zahl 1 keine Primzahl ist.



Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!