

Klassenstufe 11-12

Bitte jeweils in Teams von 3-5 Schülern bearbeiten.

Die Bewertung hängt neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründungen und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze werden belohnt.

1. Welcher griechische Gott manipuliert den Zufall?

Der alleinstehende Prof. Wankelmütig fährt jeden Abend mit dem Linienbus in die Stadt zum Abendessen. Dazu geht er an die Haltestelle Mathematisches Institut. Dort fährt im 30-min-Takt die Buslinie 311 in die Stadt. Neben deren Endhaltestelle liegt die Gaststätte Olymp, eine seiner Lieblings-Gaststätten, in der er stets eine Riesenportion gefüllte Bifteki isst. Ebenfalls im 30-min-Takt fährt von der Haltestelle Mathematisches Institut die Buslinie 317 zu einer anderen Endhaltestelle in der Stadt, neben der seine zweite Lieblingsgaststätte, die italienische Gäststätte Venezia, liegt. Hier isst er stets eine supergroße Pizza quattro stagioni. (Weitere Busse fahren an der Haltestelle Mathematisches Institut nicht ab.)

Nach einem so arbeitsreichen Tag kann sich Prof. Wankelmütig stets nicht recht entscheiden, wohin er zum Essen fahren soll. Deshalb ist er kürzlich auf folgende Idee gekommen. Er lässt den Zufall entscheiden, ob er zum Olymp oder ins Venezia fährt: Er steigt immer in den jeweils zuerst an der Bushaltestelle ankommenden Bus.

Da Prof. Wankelmütig äußerst genau ist, führt er in seinem Taschenkalender genau Buch. Nach zwei Monaten ist er aber sehr verwundert, als er eine Aufstellung seiner Gaststättenbesuche am Abend macht. Er war nämlich nur 9-mal im Venezia aber 32-mal im Olymp.

Jetzt ist Prof. Wankelmütig verwirrt. Welcher griechische Gott (vielleicht gar Zeus?) hat da den Zufall manipuliert und ihn da so beharrlich ins Restaurant Olymp gezerrt?

Können Sie das Rätsel lösen? Bitte Erklärung angeben.

Nehmen Sie an, dass die Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle eine gleichverteilte Zufallsvariable ist.



Du gehst ins Olymp zum Essen!!!

2. Geometrie

Kerstin behauptet, dass man durch einen Würfel einen ebenen Schnitt so legen kann, dass die Schnittfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Kurt behauptet, dass man einen Schnitt so legen kann, dass die Schnittfläche ein Rechteck ist, bei dem eine Seite halb so lang wie die andere ist. Wer hat Recht?

Wenn ja, geben Sie auch die entsprechende Konstruktion an!

3. Schwarzfahren

Wegen der VW-Abgasaffäre erwägt Hobby-Statistiker W. O. künftig öfter mit dem Bus zu fahren. Allerdings hat er Bedenken, den Fahrschein zu vergessen, da er in letzter Zeit sehr zerstreut ist.¹ Er möchte aber natürlich nicht unangenehm auffallen. Deswegen liest er mit Interesse das schöne T!p-Rätsel „Schwarzfahrer in Bayreuth“ aus der Studentenzeitung *Der Tip* (Nummer 566 vom 19. November 2015, S. 8). Dort heißt es:

Zu Semesterbeginn im Oktober fahren viele Studenten mit dem Bus zur Universität. Von den 15 Personen im morgendlichen Expressbus vom Bayreuther Hbf zum Campus haben fünf Studenten ihr Semesterticket vergessen. Der Fahrkartenkontrolleur macht beim Aussteigen eine Stichprobe und fragt sechs Studenten nach ihrem Ticket. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der sechs kontrollierten Studenten schwarzgefahren sind?

Helfen Sie ihm bei der Lösung.

- (a) Gehen Sie dabei in dieser Teilaufgabe davon aus, dass es sich um eine einfache Zufallsstichprobe handelt und dass mit „Schwarzfahren“ das Vergessen des – an sich ja durchaus bezahlten und vorhandenen – Semestertickets gemeint ist.
 - (i) Wie groß ist die Anzahl der „möglichen“ Fälle?²
 - (ii) Wie groß ist die Anzahl der „günstigen“ Fälle?²
 - (iii) Wie groß ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit?²
(Angabe der Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzter Bruch reicht aus.)
- (b) Tatsächlich zieht der Kontrolleur keine einfache Zufallsstichprobe, sondern weist lediglich den Busfahrer an, nur einen Türflügel zu öffnen. Er kontrolliert dann die letzten sechs aussteigenden Studenten. Allerdings haben die Studenten vorher als Teil einer Statistikübungsaufgabe die Reihenfolge, in der sie aussteigen, dadurch bestimmt, dass sie aus einer Schachtel mit fünfzehn Zetteln mit den Zahlen $1, \dots, 15$ ohne Zurücklegen je einen Zettel zufällig gezogen haben. Sie steigen dann in der Reihenfolge der Zahlen aus. Der Kontrolleur überprüft also die Studenten mit den Zahlen $10, \dots, 15$. Wie groß ist unter diesen Umständen die gesuchte Wahrscheinlichkeit?

¹Das ist in seinem Beruf übrigens nicht ungewöhnlich und insofern noch kein Grund zur – je nachdem – Besorgnis oder Freude.

²Führen Sie alle Einzelschritte explizit und in sauberer Darstellung auf, und halten Sie das Ergebnis deutlich fest.

4. Ziege

Ziege Zoro ist an einer 6 m langen Leine angebunden. Das andere Ende der Leine ist an einem Pflock befestigt, so dass die Ziege offensichtlich gerade ein kreisförmiges Stück der Wiese abweiden kann, wenn Sie auf der freien (ebenen) Wiese weiden kann.



Abbildung 1: Prinzipskizze

Im Sommer oben auf der Alm brennt die Sonne heiß, der Regen ist auch nicht immer angenehm. So wünscht sich Ziege Zoro sehnlichst, an einer Stelle angebunden zu sein, von der aus sie im Stall der Alm Unterschlupf finden kann. Daher bindet sie der Almhirt im Mittelpunkt A der Längswand der Alm an (siehe Abb. 2).

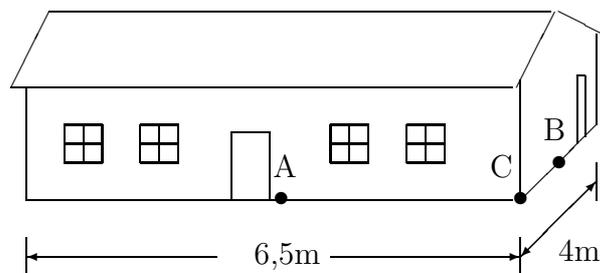


Abbildung 2: Almhütte

Ziege Zoro ist zufrieden, nach einiger Zeit allerdings meckert Zoro, da sie gemerkt hat, dass die abzugrasende Fläche deutlich kleiner geworden ist.

Aufgabe a: Zeichne den Bereich (in Draufsicht), den Ziege Zoro jetzt abweiden kann. Schraffiere die beweidete Fläche und berechne ihren Flächeninhalt.

Für seine Ziege Zoro tut der Almhirt alles. Da sich die Ziege beim Anleinen in Punkt B (Mittelpunkt der kürzeren Seitenwand des Stalls) größere Ausbeute verspricht, erfüllt er ihr auch diesen Wunsch.

Aufgabe b: Zeichne den Bereich den die Ziege jetzt abweiden kann. Berechne wieder den Flächeninhalt.

Inzwischen hat Ziege Zoro gemerkt, dass sie zwar einen geschützten Unterstand hat, dafür aber eine kleinere Weidefläche eingetauscht hat. Daher bittet sie nun den Almhirt, sie doch an der Ecke der Almhütte C anzubinden. Auch dieser Wunsch wird ihr erfüllt. Tatsächlich ergibt sich nun eine größere Weidefläche als beim Anbinden in A beziehungsweise B.

Aufgabe c: Zeichne erneut die abzugrasende Fläche und berechne ihren Flächeninhalt.

In gewisser Weise hat Ziege Zoro mit der Wahl des Punktes C die Weidefläche optimiert.

Aufgabe d: Zeige, dass es keinen anderen Punkt am Stallumfang gibt, der zu einer größeren Weidefläche führt, als die Stalleckpunkte.

5. Buntstifte

Wie jedes Jahr gibt es am Ende des Semesters an der Universität B. viele schriftliche Prüfungen. Prof. Schneider korrigiert stets mit roten Buntstiften und hat eine Schachtel mit 20 roten Buntstiften bestellt. Prof. Huber korrigiert stets mit grünen Buntstiften und hat eine Schachtel mit 20 grünen Buntstiften bestellt. Prof. Übergenau korrigiert erst mit roten Buntstiften und danach mit grünen Buntstiften und hat deshalb eine gemischte Schachtel mit 10 grünen und 10 roten Buntstiften bestellt.

Im Büromateriallager werden die Stifte aus den großen 1000er Schachteln in neutrale kleinere Schachteln umgepackt und mit Adressen beklebt.

Da ruft plötzlich Herr Schmidt: Schade, jetzt habe ich auf jede Schachtel eine falsche Adresse geklebt.

Der neue Mitarbeiter Herr Meier wird jetzt getestet. Herr Meier darf jetzt aus einer einzigen von ihm bestimmten Schachtel, ohne hineinzuschauen, einen einzigen Buntstift entnehmen und diesen entnommenen Buntstift anschließend anschauen.

Reicht das, damit Herr Meier die Adressen von allen drei Schachteln korrigieren kann?

Wenn ja, wie geht er vor? *Genaue Erklärung und Begründung angeben!*

6. Stau auf der Autobahn

Papa fährt Claudia zum Judoturnier. Papa hat sich ausgerechnet, dass er mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h rechtzeitig beim Judoturnier ankommt. Dummerweise hat er die erst heute neu eingerichtete Autobahnbaustelle und den durch sie verursachten Stau nicht berücksichtigt. Während der ersten Hälfte der Strecke schafft er nur einen Schnitt von 70 km/h. Wie schnell muss er auf der zweiten Hälfte der Strecke durchschnittlich fahren, damit Claudia trotzdem pünktlich zum Judoturnier kommt?



Rechnung (oder Zeichnung) als Begründung angeben!

Wir wissen nicht, wo Papa und Claudia zuhause sind, und auch nicht wo das Judoturnier stattfindet. Aber diese Information ist für die Lösung der Aufgabe auch gar nicht nötig.

Bonuspunkte gibt es für eine Begründung, warum Sie Start und Ziel nicht kennen müssen, um die Aufgabe zu lösen.

Viel Spaß beim Lösen der Aufgaben!