Lösungen - Wettbewerb Klasse 9/10 TdM 2016

Aufgabe 1: Stau (8 Punkte)

Sei x die halbe Strecke, die zurückgelegt werden muss.
Die geplante Gesamtzeit t zum Judoturnier ist bei einer Streckenlänge von $2x$ [km] und einer geplanten Durchschnittsgeschwindigkeit von $100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegeben durch

$$t = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{2x}{100}\text{h}.$$

Die halbe Strecke, d.h. x km, wird mit einer tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren. Die dazu benötigte Zeit beträgt $t_1 = \frac{x}{70}\text{h}$.
Damit verbleibt eine Restzeit von

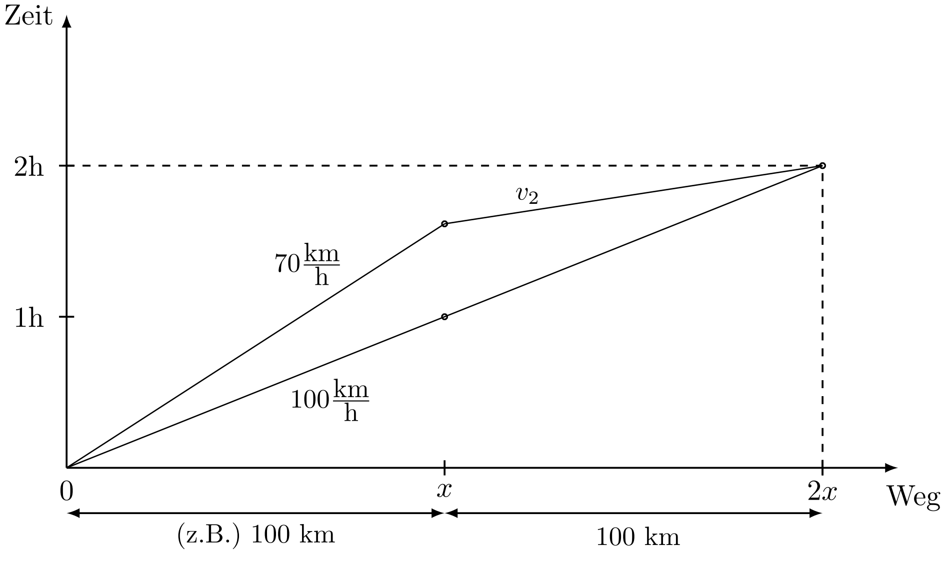
$$t_2 = t - t_1 = \frac{2x}{100} - \frac{x}{70} = \frac{14x - 10x}{700} = \frac{4x}{700}\text{h}.$$

Die zu fahrende Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \frac{x}{\frac{4x}{700}} = \frac{700}{4} = 7 \cdot 25 = 175\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

$\Rightarrow$ Papa müsste die letzte Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $175\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren, was schwerlich schaffbar ist.

Alternative Lösung: Weg-Zeit-Diagramm



$$\frac{100\text{km}}{70\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{10}{7}\text{h} \approx 1,43\text{h}, \qquad v_2 = \frac{100\text{km}}{0.57\text{h}} = 175\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgabe 2: Buntstifte (10 Punkte)

Prof. Schneider:	20 rote Buntstifte
Prof. Huber:	20 grüne Buntstifte
Prof. Übergenau:	10 rote und 10 grüne Buntstifte

An Prof. Schneider	An Prof. Huber	An Prof. Übergenau

Da jede Schachtel falsch beschriftet ist, weiß Hr. Meier, dass in der mit Prof. Übergenau beschrifteten Schachtel nicht die gemischte Sendung enthalten ist.
Er weiß also, dass darin

- entweder 20 rote Buntstifte
- oder 20 grüne Buntstifte sind.

Hr. Meier holt sich einen Buntstift heraus und sieht sich die Farbe an.

Fall 1: rot

An Prof. Übergenau	enthält 20 rote Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Schneider
$\Downarrow$		
An Prof. Huber	ist ja falsch etikettiert, enthält nicht 20 grüne Buntstifte bleibt nur noch: 10 grüne/10 rote Buntstifte richtiger Adressat: Prof. Übergenau	
$\Downarrow$		
An Prof. Schneider	enthält 20 grüne Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Huber

Fall 2: grün

An Prof. Übergenau	enthält 20 grüne Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Huber
$\Downarrow$		
An Prof. Schneider	ist ja falsch etikettiert, enthält nicht 20 rote Buntstifte bleibt nur noch: 10 grüne/10 rote Buntstifte richtiger Adressat: Prof. Übergenau	
$\Downarrow$		
An Prof. Huber	enthält 20 rote Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Schneider

Anders hat Hr. Meier keine Chance, die Aufgabe zu lösen:

Angenommen Hr. Meier holt sich einen Stift aus der an Prof. Schneider [Huber] adressierten Schachtel raus.
Er weiß zunächst nur, dass es nicht die Schachtel mit den 20 roten [grünen] Stiften ist. Es könnte also die Schachtel mit den 20 grünen [roten] Stiften oder die gemischte Schachtel sein.

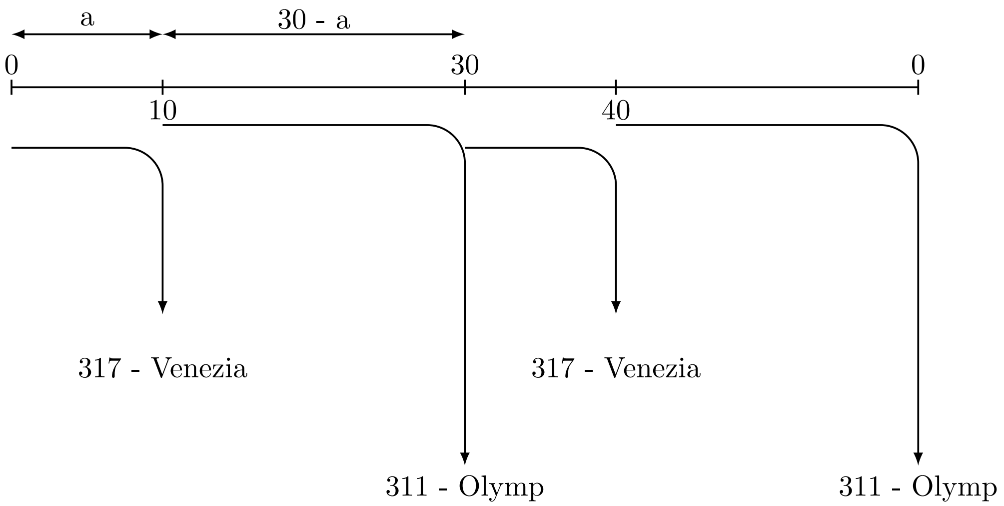
Angenommen er zieht einen grünen [roten] Stift, dann kann er nicht zwischen der Schachtel mit den 20 grünen [roten] Stiften und der gemischten Schachtel entscheiden.

VERLOREN!

Aufgabe 3: Zeus (6 Punkte)

Beide Busse fahren von derselben Haltestelle im 30 min Takt ab.
Es ist durchaus denkbar, dass Bus 311 z.B. zur Minute 0 & 30 und Bus 317 zur Minute 10 & 40 abfährt.

Dann ergibt sich folgende Situation:



- Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle $]0, 10] \cup]30, 40] \rightarrow 317$
- Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle $]10, 30] \cup]40, 0] \rightarrow 311$

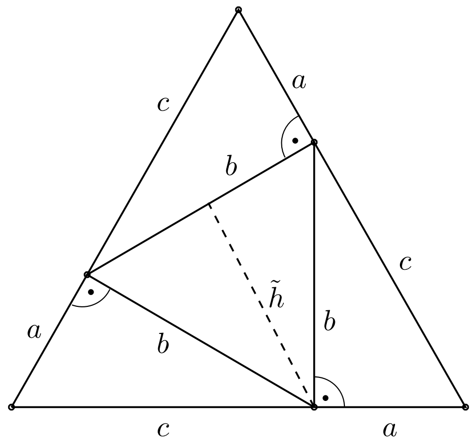
In diesem Fall würde Prof. W. mit einer Häufigkeit von $\frac{1}{3}$ im Venezia und mit einer Häufigkeit von $\frac{2}{3}$ im Olymp ankommen.

Aus den Notizen von Prof. W. lässt sich (bei pünktlichen Bussen) und gleichverteilter Ankunftszeit an der Bushaltestelle eine Schätzung für a (vgl. Skizze oben) ausrechnen:

$$a \approx \frac{9}{9+32} \cdot 30 \approx 7 \text{ [min]}.$$

$\Rightarrow$ Bus 317 fährt vermutlich 7 min nach Bus 311 ab.

Aufgabe 4: Geometrie (6 Punkte)



$F_{\text{großes gleichseitiges }\Delta} = \frac{1}{2}(a+c)h$
$F_{\text{kleines gleichseitiges }\Delta} = \frac{1}{2}b\tilde{h}$

Vewende z.B. Sinussatz:

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}c$$

Berechne die Höhen h und $\tilde{h}$ des großen und kleinen gleichseitigen Dreiecks:

$$\tilde{h} = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}b^2$$
$$h = (a+c)^2 - \left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}(a+c)^2$$

$$\frac{F_{\text{kleines gleichseitiges }\Delta}}{F_{\text{großes gleichseitiges }\Delta}} = \frac{\frac{b}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\frac{a+c}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}(a+c)} = \frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{c^2-a^2}{(a+c)^2} = \frac{c^2-\frac{1}{4}c^2}{\frac{9}{4}c^2}$$
$$= \frac{3/4}{9/4} = \frac{1}{3}$$

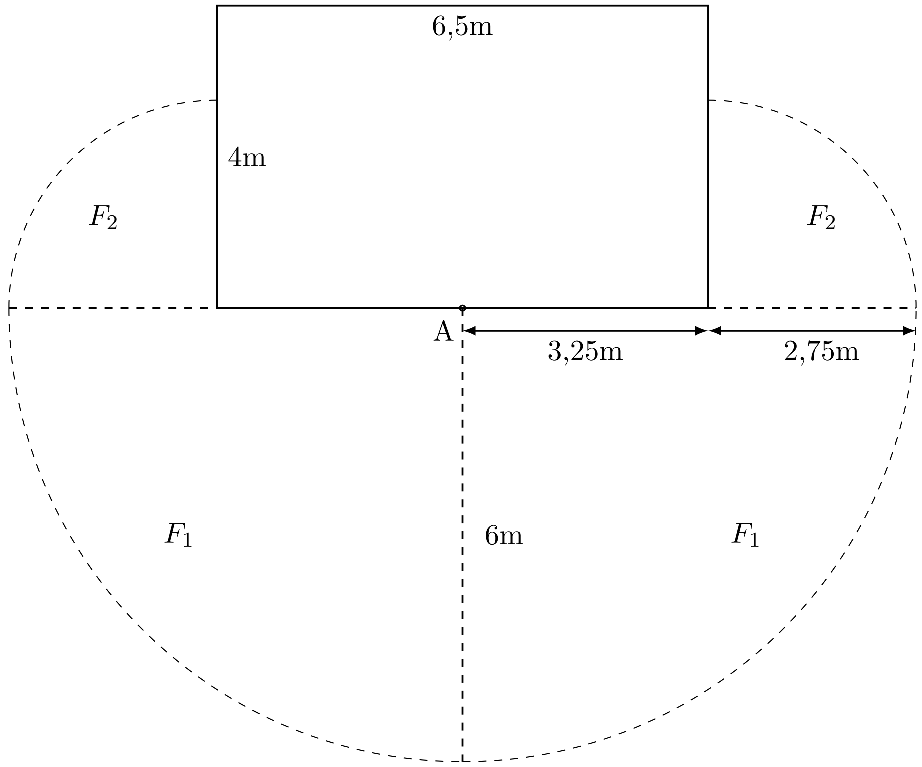
Der gesuchte Wert ergibt sich durch:

$$\frac{\Sigma F_{\text{kleine Dreiecke}}}{F_{\text{großes gleichseitiges }\Delta}} = 1 - \frac{F_{\text{kleines gleichseitiges }\Delta}}{F_{\text{großes gleichseitiges }\Delta}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 66,67\%$$

Aufgabe 5: Ziege (6 Punkte)

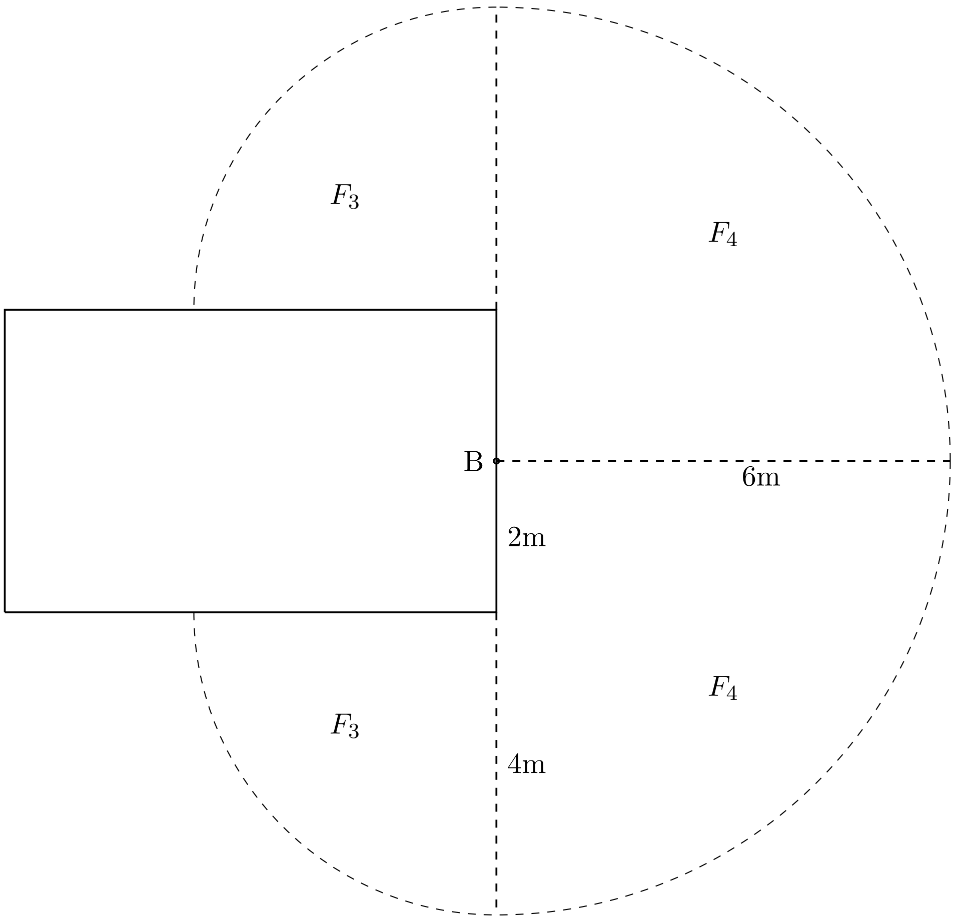
Am freien Feld ergibt sich für die Ziege der Flächeninhalt $\pi \cdot 6^2$ als abweidbare Wiese.

a)



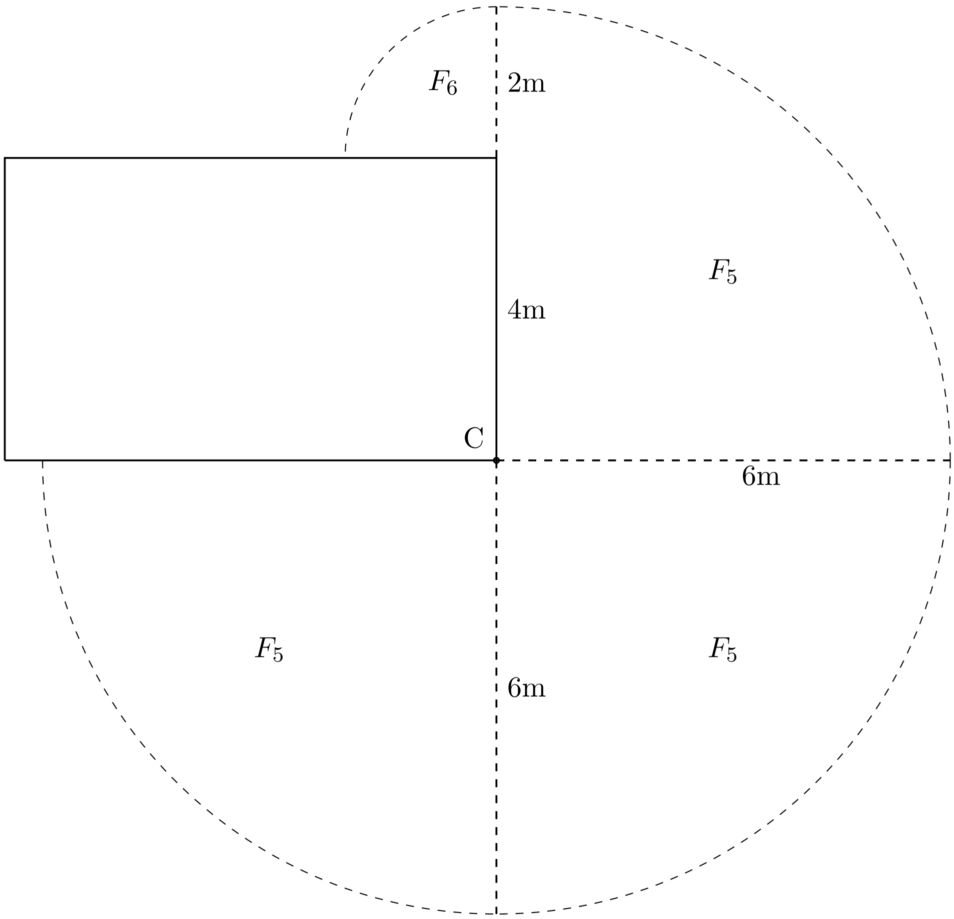
$F_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$, $F_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2,75^2$
Gesamtfläche: $2 \cdot (F_1 + F_2) = \frac{1}{2}\pi \cdot (6^2 + 2,75^2) = \pi \cdot 21,78125$

b)



$F_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2$, $F_4 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$
Gesamtfläche: $2 \cdot (F_3 + F_4) = \frac{1}{2}\pi \cdot (4^2 + 6^2) = \pi \cdot 26$

c)



$F_5 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$, $F_6 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$
Gesamtfläche: $3 \cdot F_5 + F_4 = \frac{1}{4}\pi \cdot (3 \cdot 6^2 + 2^2) = \pi \cdot 28$

Aufgabe 6: Tresor (15 Punkte)

Finde Code ABC

1. Nutze a), e) und Hinweis: A,B,C $\in \{2, 3, 5, 7\}$
2. Verwende c), d):
   c): AB Primzahl, wegen Teilbarkeitsregeln $\Rightarrow$ B $\neq 2$ und B $\neq 5$, also B $\in \{3, 7\}$.
   d): BC Primzahl, wegen Teilbarkeitsregeln $\Rightarrow$ C $\neq 2$ und C $\neq 5$, also C $\in \{3, 7\}$.

   Für die Zahl BC bleibt übrig:

   33 , teilbar durch 3 und 11
   37 , Primzahl, da nicht teilbar durch 2, 3, 5, 7, (11, 13)
   73 , Primzahl, da nicht teilbar durch 2, 3, 5, 7, (11, 13)
   77 , teilbar durch 7 und 11

Bemerkung: Es reicht bis zu (Prim-)Teilern der Größe $\sqrt{37} \approx \sqrt{49} = 7$ bzw. $\sqrt{73} \approx \sqrt{81} = 9$ zu testen.

Für die Zahl AB bleibt übrig:

$$\begin{aligned} 23 &\quad, \text{ Primzahl} \\ 27 &\quad, \text{ teilbar durch } 3 \\ 53 &\quad, \text{ Primzahl} \\ 57 &\quad, \text{ teilbar durch } 3 \\ 37 &\quad, \text{ Primzahl} \\ 73 &\quad, \text{ Primzahl} \end{aligned}$$

3. Verwende b):
Für die Zahl ABC bleibt übrig:

$$\begin{aligned} 237 &\quad, \text{ teilbar durch } 3 \\ 537 &\quad, \text{ teilbar durch } 3 \\ 573 &\quad, \text{ teilbar durch } 3 \\ 373 & \\ 737 & \end{aligned}$$

Die letzten beiden Zahlen müssen jetzt auf Teilbarkeit durch (2, 3, 5), 7, 11, 13, 17, 19, (23, 29) getestet werden.

Bemerkung: Es reicht bis zu (Prim-)Teilern der Größe $\sqrt{373} \approx \sqrt{400} = 20$ bzw. $\sqrt{737} \approx \sqrt{900} = 30$ zu testen.

<u>Primzahltest der Zahl 373:</u>

$$\begin{gathered} 373 : 7 = 53 \text{ Rest } 2 \\ 373 : 11 = 33 \text{ Rest } 10 \\ 373 : 13 = 28 \text{ Rest } 9 \\ 373 : 17 = 21 \text{ Rest } 16 \\ 373 : 19 = 19 \text{ Rest } 12 \\ 373 : 23 = 16 \text{ Rest } 5 \\ \vdots \end{gathered}$$

<u>Primzahltest der Zahl 737:</u>

$$\begin{aligned} 737 : 7 &= 15 \text{ Rest } 2 \\ 737 : 11 &= 67 \quad \Rightarrow \text{also ist } 737 \text{ } \underline{\text{keine}} \text{ Primzahl} \end{aligned}$$

Damit ist der einzig übrigbleibende Code <u>373</u>.

Nur <u>einen</u> Code muss Dr. Kurt Vergesslich ausprobieren.