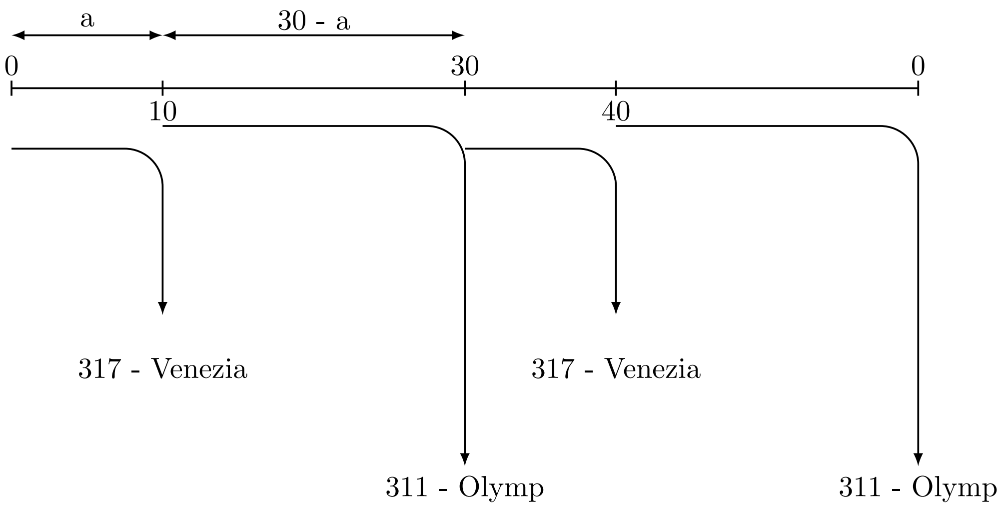
Lösungen - Wettbewerb Klasse 11/12 TdM 2016

Aufgabe 1: Zeus (6 Punkte)

Beide Busse fahren von derselben Haltestelle im 30 min Takt ab.
Es ist durchaus denkbar, dass Bus 311 z.B. zur Minute 0 & 30 und Bus 317 zur Minute 10 & 40 abfährt.

Dann ergibt sich folgende Situation:



- Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle $]0, 10] \cup]30, 40] \rightarrow 317$
- Ankunftszeit von Prof. Wankelmütig an der Bushaltestelle $]10, 30] \cup]40, 0] \rightarrow 311$

In diesem Fall würde Prof. W. mit einer Häufigkeit von $\frac{1}{3}$ im Venezia und mit einer Häufigkeit von $\frac{2}{3}$ im Olymp ankommen.

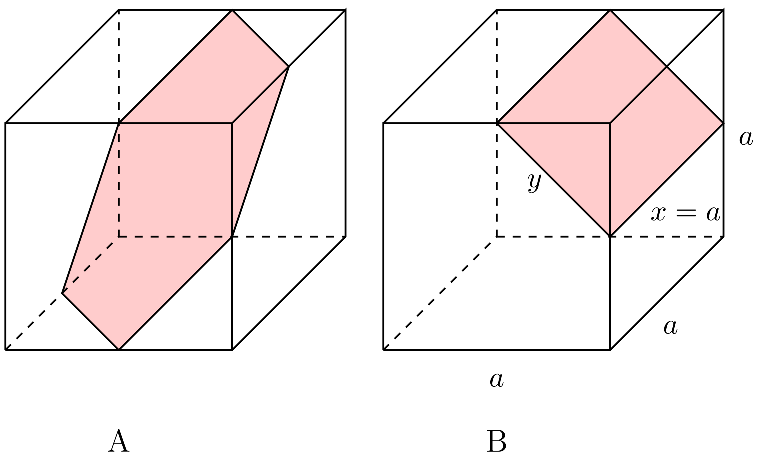
Aus den Notizen von Prof. W. lässt sich (bei pünktlichen Bussen) und gleichverteilter Ankunftszeit an der Bushaltestelle eine Schätzung für a (vgl. Skizze oben) ausrechnen:

$$a \approx \frac{9}{9+32} \cdot 30 \approx 7 \text{ [min]}.$$

$\Rightarrow$ Bus 317 fährt vermutlich 7 min nach Bus 311 ab.

Aufgabe 2: Geometrie (6 Punkte)

Beide haben recht, vgl. Figuren A und B:



Bei A liegen die Eckpunkte des regulären Sechsecks auf den Mittelpunkten der Kanten.

Bei B lässt sich anschaulich $y = \frac{x}{2} = \frac{a}{2}$ ohne Probleme realisieren.

Aufgabe 3: Schwarzfahren (6 Punkte)

15 Personen im Bus:

- 5 Schwarzfahrer
- 10 übrige Personen mit Fahrkarte

6 Personen werden kontrolliert.
(Ziehen von Kugeln 2er Farben aus einer Urne ohne Zurücklegen.)

a) (i) Anzahl der möglichen Fälle:

$$\binom{15}{6} = \frac{15!}{6!(15-6)!}$$

(ii) Anzahl der günstigen Fälle:

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{4} = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{10!}{4!6!}$$

(iii) gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

$$= \frac{5! \cdot 10! \cdot 9! \cdot 6!}{2 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 6! \cdot 15!}$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}$$

$$= \frac{3 \cdot 5 \cdot 8}{2 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{13 \cdot 11} = \frac{60}{143} \approx 42\%$$

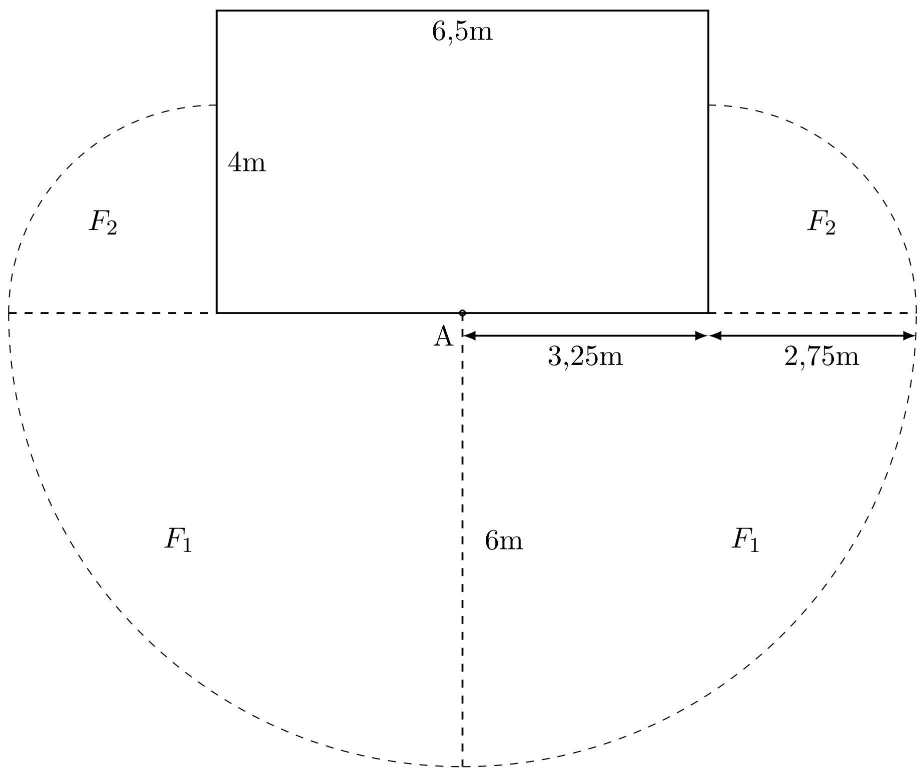
b) gleiche Lösung wie bei a):

$$p = \frac{60}{143}$$

Aufgabe 4: Ziege (8 Punkte)

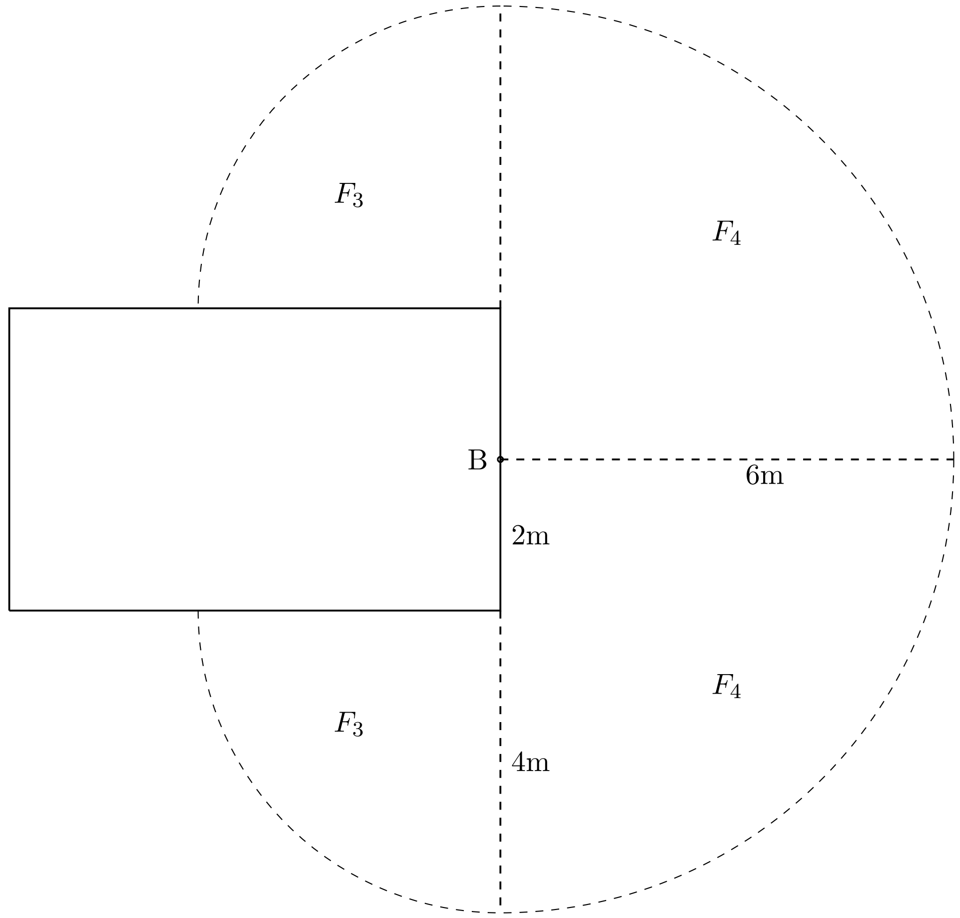
Am freien Feld ergibt sich für die Ziege der Flächeninhalt $\pi \cdot 6^2$ als abweidbare Wiese.

a)



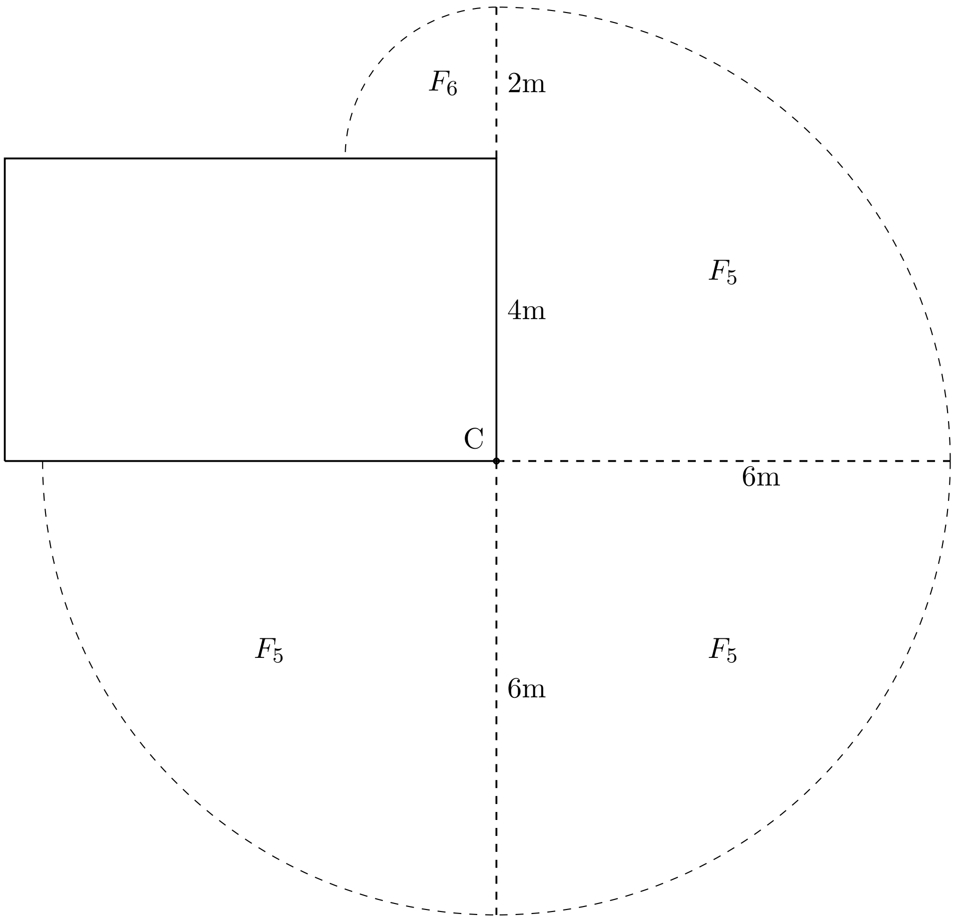
$F_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$, $\quad F_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2,75^2$
Gesamtfläche: $\quad 2 \cdot (F_1 + F_2) = \frac{1}{2}\pi \cdot (6^2 + 2,75^2) = \pi \cdot 21,78125$

b)



$F_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4^2$, $\quad F_4 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$
Gesamtfläche: $\quad 2 \cdot (F_3 + F_4) = \frac{1}{2}\pi \cdot (4^2 + 6^2) = \pi \cdot 26$

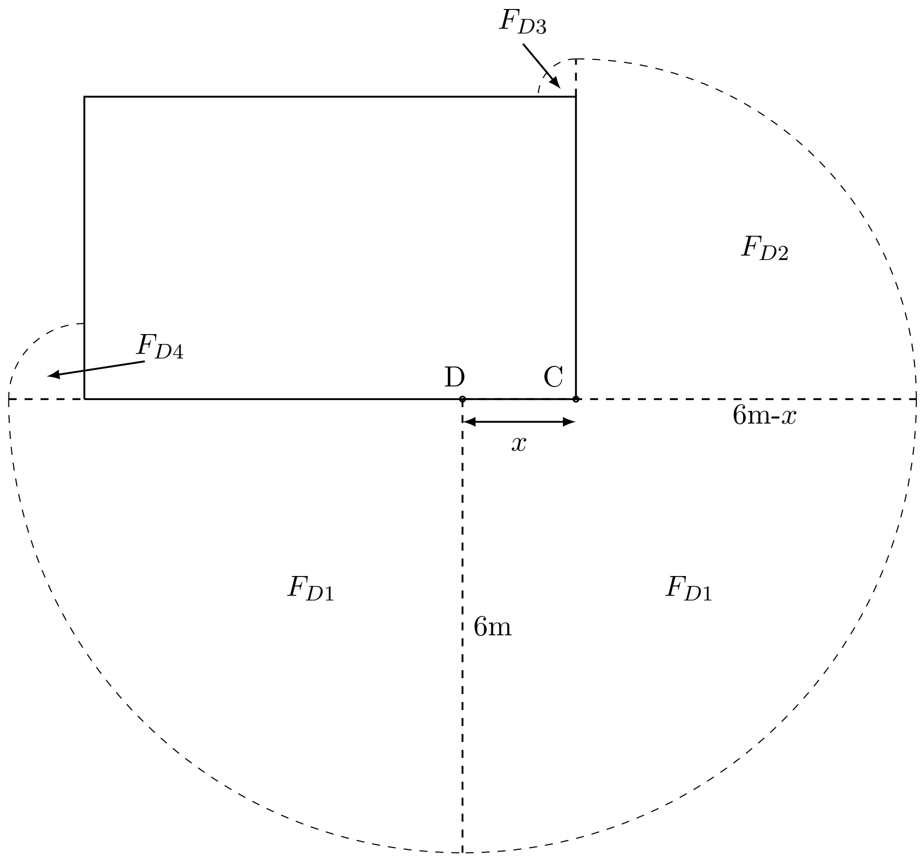
c)



$F_5 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2$, $F_6 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2$

Gesamtfläche: $3 \cdot F_5 + F_4 = \frac{1}{4}\pi \cdot (3 \cdot 6^2 + 2^2) = \pi \cdot 28$

d)



Wir berechnen den Flächeninhalt der abweidbaren Wiese im Punkt D. Die Länge x bezeichnet den Abstand des Punktes D vom Punkt C. Dabei reicht es wegen der Symmetrie aus, nur $x \in [0; 3,25]$ zu betrachten.
Für die Teilstücke erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F_{D1} &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 6^2, \\
F_{D2} &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (6-x)^2, \\
F_{D3} &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (x-2)^2, \\
F_{D4} &= \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Da die Teilstücke F_{D4} und F_{D3} je nach Lage von D einen bzw. keinen Beitrag liefern, betrachten wir drei Fälle:

Fall 1: $2 \leq x \leq 3,25$

$$F_{\text{gesamt},1} = 2F_{D1} + F_{D2} + F_{D4} = \frac{1}{4}\pi\left[2 \cdot 6^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (x-6)^2\right]$$

Fall 2: $0,5 \leq x \leq 2$

$$F_{\text{gesamt},2} = 2F_{D1} + F_{D2} + F_{D3} + F_{D4} = \frac{1}{4}\pi\left[2 \cdot 6^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (x-6)^2 + (x-2)^2\right]$$

Fall 3: $0 \leq x \leq 0,5$

$$F_{\text{gesamt},3} = 2F_{D1} + F_{D2} + F_{D3} = \frac{1}{4}\pi\left[2 \cdot 6^2 + (x-6)^2 + (x-2)^2\right]$$

In allen drei Fällen ist der gesamte Flächeninhalt in den jeweiligen Bereichen streng monoton fallend.
Zusätzlich sehen wir uns die Übergänge der Flächenfunktionen zwischen den einzelnen Fällen an:

$$\begin{aligned}
x = 3,25: \quad & F_{\text{gesamt},1} = \frac{697}{32}\pi = 21,78125\pi \\
x = 2: \quad & F_{\text{gesamt},1} = \frac{361}{16}\pi = 22,5625\pi \\
x = 2: \quad & F_{\text{gesamt},2} = \frac{361}{16}\pi = 22,5625\pi \\
x = 0,5: \quad & F_{\text{gesamt},2} = \frac{209}{8}\pi = 26,125\pi \\
x = 0,5: \quad & F_{\text{gesamt},3} = \frac{209}{8}\pi = 26,125\pi \\
x = 0: \quad & F_{\text{gesamt},3} = 28\pi
\end{aligned}$$

Dadurch folgt, dass der Eckpunkt (für $x = 0$) die größte Fläche liefert.
Mit einem ähnlichen Vorgehen auf der kürzeren Hausseite, erhalten wir wiederum den Eckpunkt C. Demnach bekommt die Ziege immer an den Eckpunkten des Hauses die größte Weidefläche.

Aufgabe 5: Buntstifte (10 Punkte)

Prof. Schneider:	20 rote Buntstifte
Prof. Huber:	20 grüne Buntstifte
Prof. Übergenau:	10 rote und 10 grüne Buntstifte

An Prof. Schneider	An Prof. Huber	An Prof. Übergenau

Da jede Schachtel falsch beschriftet ist, weiß Hr. Meier, dass in der mit Prof. Übergenau beschrifteten Schachtel nicht die gemischte Sendung enthalten ist.
Er weiß also, dass darin

- entweder 20 rote Buntstifte

- oder 20 grüne Buntstifte sind.

Hr. Meier holt sich einen Buntstift heraus und sieht sich die Farbe an.

Fall 1: rot

An Prof. Übergenau	enthält 20 rote Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Schneider
⇓		
An Prof. Huber	ist ja falsch etikettiert, enthält nicht 20 grüne Buntstifte bleibt nur noch: 10 grüne/10 rote Buntstifte richtiger Adressat: Prof. Übergenau	
⇓		
An Prof. Schneider	enthält 20 grüne Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Huber

Fall 2: grün

An Prof. Übergenau	enthält 20 grüne Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Huber
⇓		
An Prof. Schneider	ist ja falsch etikettiert, enthält nicht 20 rote Buntstifte bleibt nur noch: 10 grüne/10 rote Buntstifte richtiger Adressat: Prof. Übergenau	
⇓		
An Prof. Huber	enthält 20 rote Buntstifte	richtiger Adressat: Prof. Schneider

Anders hat Hr. Meier keine Chance, die Aufgabe zu lösen:

Angenommen Hr. Meier holt sich einen Stift aus der an Prof. Schneider [Huber] adressierten Schachtel raus.
Er weiß zunächst nur, dass es nicht die Schachtel mit den 20 roten [grünen] Stiften ist. Es könnte also die Schachtel mit den 20 grünen [roten] Stiften oder die gemischte Schachtel sein.

Angenommen er zieht einen grünen [roten] Stift, dann kann er nicht zwischen der Schachtel mit den 20 grünen [roten] Stiften und der gemischten Schachtel entscheiden.

VERLOREN!

Aufgabe 6: Stau (8 Punkte)

Sei x die halbe Strecke, die zurückgelegt werden muss.
Die geplante Gesamtzeit t zum Judoturnier ist bei einer Streckenlänge von $2x$ [km] und

einer geplanten Durchschnittsgeschwindigkeit von $100\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gegeben durch

$$t = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} = \frac{2x}{100}\text{h}.$$

Die halbe Strecke, d.h. x km, wird mit einer tatsächlichen Durchschnittsgeschwindigkeit von $70\frac{\text{km}}{\text{h}}$ durchfahren. Die dazu benötigte Zeit beträgt $t_1 = \frac{x}{70}\text{h}$.
Damit verbleibt eine Restzeit von

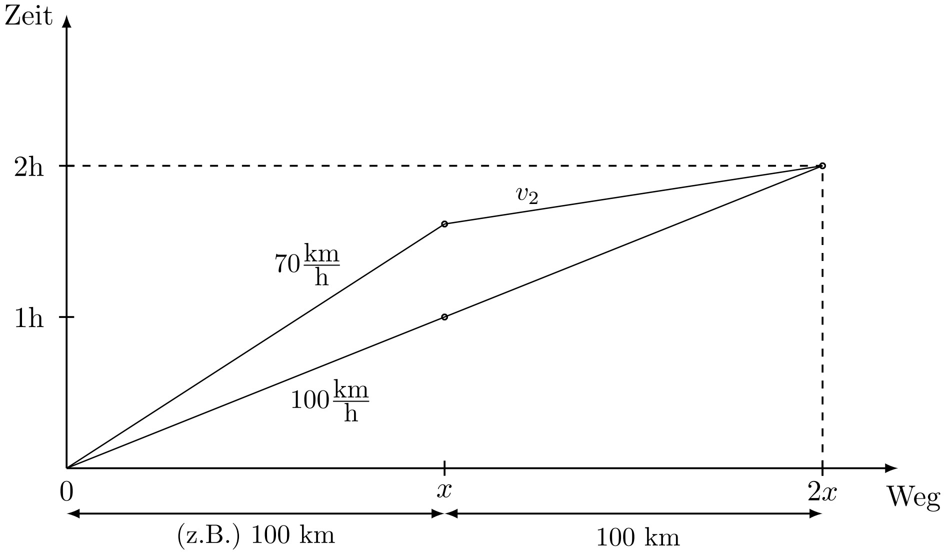
$$t_2 = t - t_1 = \frac{2x}{100} - \frac{x}{70} = \frac{14x - 10x}{700} = \frac{4x}{700}\text{h}.$$

Die zu fahrende Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \frac{x}{\frac{4x}{700}} = \frac{700}{4} = 7 \cdot 25 = 175\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

$\Rightarrow$ Papa müsste die letzte Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $175\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren, was schwerlich schaffbar ist.

Alternative Lösung: Weg-Zeit-Diagramm



$$\frac{100\text{km}}{70\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{10}{7}\text{h} \approx 1,43\text{h}, \qquad v_2 = \frac{100\text{km}}{0.57\text{h}} = 175\frac{\text{km}}{\text{h}}$$